Г.Б. Шабат

О числах и их именах

В работе рассмотрено общее понятие числа. Часть работы посвящена освещению этого понятия с позиций современной математики; в другой части рассматриваются выразительные возможности различных языков, связанные с наименованием количеств предметов в окружающем мире и с абстрагированием от природы этих предметов. Особое внимание уделено проблеме наименования больших натуральных чисел. В конце работы кратко освещаются математические и лингвистические проблемы, связанные с бесконечными множествами.

Ключевые слова: число, числительное, позиционная система счисления, взаимно однозначное соответствие, бесконечность.

0. Введение и посвящение

Все знают, что Григорий Ефимович Крейдлин – замечательный лингвист широкого профиля, один из ведущих мировых специалистов по невербальной семиотике и автор огромного количества работ на разнообразные языковые темы. Менее известно другое, уникальное свойство Крейдлина – унаследованное им от отца (известного учителя математики и автора популярных задачников) глубокое знание элементарной математики. До наступления эпохи ЕГЭ мы с Григорием Ефимовичем работали в приёмной комиссии по математике Института Лингвистики РГГУ, и я с удовольствием свидетельствую, что он придумывал вступительные задачи, решал их и проверял лучше и быстрее, чем многие профессионалы-математики.

Крейдлину не свойственно раздвоение личности, и упомянутое уникальное свойство привело его, среди прочего, к изучению *языка математики*. В прошлом веке он работал в отделе семиотики ВИНИТИ в группе Е.В. Падучевой, и занимался, в частности, логико-семантическим анализом точных утверждений.[1] Спустя много лет образовался наш с ним тандем лингвиста и математика, и мы написали несколько работ о языках геометрии; представление о них можно составить по нашим статьям, опубликованным в «Вестнике РГГУ».[2]

Настоящий текст примыкает к работам нашего тандема, но, во-первых, относится к другой предметной области, а, во-вторых, написан математиком единолично. В результате изложенные в этом тексте лингвистические соображения носят любительский характер, тогда как математика упоминается (разумеется, весьма поверхностно) несколько более изощрённая, чем допустил бы Крейдлин, всегда защищающий читателя-лингвиста от ненужных перегрузок.

Цель задуманной серии статей – рассказать лингвистам о развитии и сегодняшнем состоянии понятия числа, обращая особое внимание на языковые проблемы, связанные с описанием чисел и операций над ними. Одна из таких проблем, частично решённых, но во многом открытых – выработка адекватной системы **имён** чисел и числовых множеств.

За годы совместной работы я многому научился у Гриши Крейдлина: устному прочтению формул, вниманию к точным формулировкам, анализу научных терминов и связанных с ними ассоциаций, концепции понимания.

Статья посвящается Грише к 70-летию – с любовью и надеждами.

1. Об именах натуральных чисел в бытовом языке

Лингвистическая литература о числительных необъятна, и я ограничусь несколькими замечаниями и ссылками; при этом будут свободно использоваться (с необходимыми пояснениями) понятия и термины современной математики.

По-видимому, на самых ранних стадиях развития языков мира формировались языковые единицы, означающие *мощности* небольших *конечных* множеств[3]; одному замечательному исключению (*пирахан – язык без числительных?*) посвящена работа Иванова.[4] Установление этих мощностей и представляет собой *пересчёт* элементов множества, к которому предъявляется некоторое интуитивное требование *однородности*: три ночи и два волка вряд ли составляют множество, пригодное для пересчёта элементов. При развитии счёта решались две основные задачи: <u>абстрагирование</u> от природы пересчитываемых элементов и <u>именование</u> мощностей. Обе заслуживают обсуждения – в настоящей работе по необходимости краткого.

1.0. Необходимые понятия. Для уточнения обсуждаемых понятий необходимо прежде всего дать определение *конечного* множества.[5] Мы будем свободно пользоваться понятием *отображения* множеств

$$f : X \to Y$$

как закона[6], сопоставляющего каждому элементу $x \in X$ вполне определённый элемент $f(x) \in Y$. Отображение f называется *инъективным*, если разным элементам сопоставляются разные, то есть если для $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, и *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Отображение называется *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно; по-русски несколько более предпочтительно абсолютно синонимичное выражение *взаимно однозначное соответствие*. Отображение $f : X \to Y$ множества в себя называется *эндоморфизмом*.

Множество называется *бесконечным*, если допускает инъективный, но не сюръективный эндоморфизм. Так, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ бесконечно, о чём говорит эндоморфизм *удвоения* $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Разумеется, множество называется *конечным*, если не является бесконечным. Важное упражнение (абсолютно необходимое для понимания современной математики и желательное для понимания настоящего текста) – понять, почему множества, в которых (на бытовом языке) лишь *несколько* элементов, конечны в смысле приведённого определения.

Два множества называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие; чуть-чуть точнее – если существует биективное отображения одного из них в другое. Наконец, *натуральное число* – это <u>класс равномощности конечных множеств</u>.

1.1. Нужно ли определение натурального числа? Современному математику приведённое определение представляется идеально ясным и необходимым как для построения оснований количественной математики, так и для её сколько-нибудь серьёзного преподавания.

Нематематик же может возразить, что это определение сложно и длинно, что использованным понятиям и терминам – лишь сто с небольшим лет, тогда как понятия числа и счёта уходят вглубь десятков тысячелетий; следовательно, многие поколения наших предков обходились без всяких биекций, развив прекрасные системы обозначений чисел и разработав эффективные технологии счёта. К тому же теоретико-множественные понятия не входят в стандартные школьные программы большинства развитых стран[7], однако инженеры, бухгалтеры, домашние хозяйки и другие граждане этих стран прекрасно понимают, что значит натуральный ряд 1,2,3, .., 2016, ...

Обе точки зрения имеют право на существование. Автору, однако, ближе первая из них – в том числе как профессиональному преподавателю математики нематематикам (около четверти века основная работа автора – преподавание математики лингвистам в РГГУ).

Отказ от обучения математике (и, в частности, счёту) на теоретико-множественной основе пока не сопровождается заметными успехами в массовом образовании. Наоборот, во многих странах навыки элементарной *числовой грамотности*[8] среднестатистического гражданина часто признаются неудовлетворительными[9]. Распространяющаяся ориентация на *real-life problems* не приносит успехов, а скорее приближает некоторые современные учебные заведения к древнеегипетским школам писцов (снабжённых микрокалькуляторами). По-видимому, в обозримом будущем следует ожидать всеобщего разочарования в любых методиках обучения счёту, не основанных на понимании абстрактного натурального ряда. Тогда приведённые выше определения (возможно, излагаемые более популярно) станут более распространёнными, а для людей, связанных с преподаванием математики – обязательными.

1.2. Абстрагирование. Упомянутое выше абстрагирование есть способность отвлечься от природы считаемых предметов при овладении концепцией натурального ряда. Наиболее полное понимание этой способности (и отдельных людей, и их групп – от малых народов до цивилизаций) достигается с помощью языкового материала, в изобилии поставляемого современной лингвистикой.

Путь от счёта количеств (однородных) предметов до абстрактного понятия натурального числа человечество проходило постепенно. Замечательно, что это утверждение в наше время может быть обосновано не только с помощью гипотетических реконструкций, но и на основе прямых наблюдений (и потому оно несравненно убедительней, скажем, энгельсовского предположения о *труде, создавшем человека из обезьяны...*). Лингвистам удалось обнаружить и описать живые – увы, исчезающие – языки, сохранившие некоторые архаические черты *частичного* абстрагирования от свойств предметов при их подсчёте.

В книге Данцига[10] приводятся сведения о языке индейцев *цимшиан*, в котором имеется семь наборов числительных для разных сортов предметов. Плоские предметы и животные считаются в этом языке с помощью одних слов, круглые – с помощью других, длинные предметы и деревья – с помощью третьих, люди – с помощью четвёртых и т.д. Аналогичное явление встречается в *нивхском языке*; оно описано у Крейновича.[11] В этом замечательном языке различается 26 сортов считаемых предметов (включая, например, связок корма собакам и прутьев с нанизанной на них корюшкой). Сформированы специальные средства для счёта *парных* объектов – глаз, ушей, лыж, вёсел, ...; таким образом, в нивхском языке сделан важный шаг в сторону теоретико-множественных конструкций.

Математику может показаться, что в современных языках подобные явления полностью преодолены, и в результате подсчёта элементов множества информация об их природе полностью уничтожается. Однако наличие русских словоформ *двое, трое, .., семеро* – поиск в Интернете показывает, что они называются *собирательные числительные*[12] – опровергает это скороспелое предположение. Вряд ли исследование данного рудимента древнего счёта (и его аналога в других языках) составляет глубокую лингвистическую проблему, однако отметим, что здесь язык помечает границы *малых* конечных множеств: словоформы **восьмеро*, видимо, не существует. Другая граница определяется последовательностью *вдвоём, втроём, .., вдесятером*: видимо, **водиннадцатером* сделать ничего нельзя.

1.3. Именование. Осознание природы абстрактного натурального числа (напомним, *класса равномощности конечных множеств*, см. подраздел 1.0) примыкает к лингвистическим задачам: назвать, записать, канонизировать прочтение и т.п. Литература по этим вопросам обширна; ограничимся ссылкой (наряду с уже цитированной работой Данцига) на популярную, но фундаментальную книгу Меннингера.[13] В качестве недавней более серьёзной работы можно предложить, например, Regier.[14]

Многократно описан сложный путь человечества от зарубок на костях животных до современной *позиционной* (десятичной) системы счисления – той единственной, которой в наше время учат всех детей планеты.

Далее будет использоваться обозначение $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, ...\}$ для множества натуральных чисел[15]; в него, согласно французской[16] традиции включён 0 как мощность *пустого* множества, являющегося, согласно определению из пункта 1.0, конечным. Обозначение $\dot{\mathbb{N}} = \{0,1,2,3, ...\}$ будет использоваться для множества *положительных* натуральных чисел. *Алфавитом* будет называться произвольное конечное множество, элементы которого принято называть *буквами*, а в одном всем известном случае – *цифрами*.

Линейным квазитекстом[17] в алфавите $\mathfrak{A}$ мы будем называть либо отображение $\{1, ... , n\} \to \mathfrak{A}$ при $n \in \mathbb{N}$, либо отображение $\dot{\mathbb{N}} \to \mathfrak{A}$; соответствующие тексты называются *конечными* и *бесконечными*. Интуитивно линейный квазитекст $\{1,2,3,...\} \to \mathfrak{A}$ следует представлять себе как написание на 1-ю, 2-ю, 3-ю, ... позицию сопоставленных этим позициям букв. В случае конечного квазитекста $\{1, ... , n\} \to \mathfrak{A}$ число $n \in \mathbb{N}$ называется его *длиной*; подчеркнём, что допускается случай $n = 0$, соответствующий *пустому* тексту (ничего никуда не отображается и не пишется). Бесконечные квазитексты в связи с *натуральными* числами не встречаются.

Именованием натуральных чисел (термин нестандартный) называется инъективное отображение либо множества $\dot{\mathbb{N}}$, либо отрезка $\{1, \ldots, N\}$ при $N > 1$ в множество конечных линейных квазитекстов в некотором фиксированном алфавите. Иначе говоря, именование натуральных чисел – это способ их исчерпывающего описания некоторыми квазитекстами, которые, видимо, в этом случае всё-таки можно назвать *текстами*.

Каждый язык мира выработал свои именования натуральных чисел (кроме, возможно, упомянутого в начале статьи языка пирахан, относительно которого, впрочем, имеется предположение, согласно которому его числительные просто атрофировались). Эти именования весьма разнообразны; дешифровка и анализ сохранившихся текстов, начиная с вавилонских клинописных глиняных табличек, весьма интересна даже с одной только математической точки зрения[18].

С точки зрения чистой математики наиболее существенная характеристика любого именования – способность или неспособность поименовать как угодно большое натуральное число, то есть определённость на всём множестве $\dot{\mathbb{N}}$ или только на его отрезке.

Самый, по-видимому, древний метод изображения чисел зарубками, в котором алфавит $\mathfrak{A} = \{|\}$ одноэлементен, позволяет (теоретически) выразить как угодно большое число. Тем же свойством обладает древневавилонская десятично-шестидесятеричная система сложения. А вот именование чисел, основанное на римских цифрах и ещё в первой половине минувшего тысячелетия господствовашее в Европе, охватывает числа лишь до 3999 – это «наибольшее» число задаётся (квази?)текстом MMMCMXCIX. И лишь вытеснение этого именования современным позиционным, основанным на алфавите $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, окончательно расчистило человечеству путь к (актуально) бесконечному множеству $\mathbb{N}$.

В Европе это вытеснение началось с появления в 1202 книги Леонардо Пизанского (Фибоначчи) Liber Abaci[19]. Оно происходило в напряжённой борьбе *абакистов* (последователей Фибоначчи) с *алгоритмиками* (приверженцами римских цифр). Победа потребовала более двух веков; она ковалась, в частности, в итальянских коммерческих школах, в которых преподаватели обучали людей практических профессий тем действиям с числами, которым наши современники обучаются в начальной школе. Самое трудное заключалось в том, чтобы преодолеть стойкое недоверие деловых людей к нулю, таинственному символу 0, который не отражает никакого количества (является *мощностью пустого множества*), но приписывание которого *удесятеряет* величины.

К концу шестнадцатого века десятичная система счисления охватила Европу, а ещё через два-три столетия образовалась ситуация, которую мы наблюдаем сейчас: почти всё человечество пользуется одними и теми же именами натуральных чисел в одном и том же алфавите.[20] При изобилии и разнообразии языков на нашей планете это явление представляется удивительным, особенно в исторической перспективе.

Итак, после многотысячелетней конкуренции огромного количества разнообразнейших способов именования натуральных чисел победил один-единственный – тот, которым мы все сейчас пользуемся и на котором мы «общаемся» с миллиардами вычислительных устройств, наводнивших нашу планету. Этому способу всего сотни лет – ничтожный срок по сравнению с продолжительностью эпохи, в течение которой человечество умеет считать. Является ли победа позиционной системы счисления окончательной? У математиков есть одна неочевидная причина для утвердительного ответа на этот вопрос.

Колмогоровской сложностью произвольного линейного квазитекста Q_{out} называется минимальная возможная длина линейного квазитекста Q_{in}, который можно ввести в (идеальный[21]) компьютер с тем, чтобы компьютер напечатал Q_{out}. Колмогоровская сложность определена приближённо: её значение зависит от специфики идеального компьютера, участвующего в её определении, однако чем длиннее квазитекст, тем меньше относительная погрешность, вносимая этой зависимостью. Последнее утверждение и утверждение о корректности приведённого выше определения – глубокие математические результаты, последние из полученных А.Н. Колмогоровым и изложенные в работе его учеников[22]. В этой же работе приводится доказательство теоремы Колмогорова 1.4, которую можно интерпретировать как утверждение о том, что *колмогоровская сложность наугад взятого большого числа приближённо равна логарифму этого числа*, то есть (если логарифм десятичный – а выбор основания логарифма есть просто выбор единицы измерения сложности) как раз количеству десятичных знаков числа. Это и означает, что принципиально более эффективных, чем позиционное, именований натуральных чисел не существует.

1.4. Большие числа. Наряду с проблемой выражения на данном языке *сколь угодно* больших чисел, рассмотренной в предыдущем разделе, имеется проблема выражения *конкретных* больших чисел.

Первой работой, в которой рассматривалась вторая из этих проблем, была написанная Архимедом в III-м веке до Р.Х. книга «Исчисление песчинок»[23]. В ней отмечалось несовершенство принятой в древней Греции системы записи натуральных чисел – невозможность стандартными средствами записать ОЧЕНЬ БОЛЬШИЕ числа. Был предложен выход: выйти за пределы *мириад* – так называлось число 10^5, наибольшее из именованных в те времена – путём введения (на современном языке) позиционной системы счисления с основанием 10000. Архимед расширил систему именования языковыми средствами, введя *первые числа*, *вторые числа* и т.д., вплоть до *мириадо-мириадных чисел*; затем были введены *периоды*, и наибольшим числом, допускающим архимедово именование, оказалось $10^{8 \cdot 10^{16}}$. Новшество было блистательно применено к называнию наибольшего числа, которое представлялось имеющим смысл: количество песчинок в шаре, центр которого расположен на Земле, а радиус равен расстоянию от Земли до Солнца (это число связывалось с *объёмом Вселенной*).

Во времена Архимеда, по-видимому, лишь люди с патологически повышенным воображением чувствовали себя в обыденной жизни окружёнными огромными числами. Сейчас всё иначе. Образованный человек уже в XIX-м веке имел представление о том, что в некотором небольшом объёме[24] вокруг него содержится около $6.8 \cdot 10^{23}$ молекул – так называемое число *Авогадро*. На памяти одного поколения *килобайты* были сменены *мегабайтами*, а затем *гигабайтами* и *терабайтами*[25]; соответствующие количества информации (в *битах*) могут храниться в наших кошельках или на связках ключей. Согласно таблицам ГОСТа, доступным в Интернете, грядущие поколения могут оказаться окружёнными *петабайтами* и *эксабайтами*. Возможности соединений корней разных языков когда-нибудь будут исчерпаны, и нашим потомкам придётся придумывать новые приёмы...

Несмотря на упомянутую в предыдущем разделе оптимальность позиционного именования больших натуральных чисел, связанное с ними словотворчество неизбежно. Свежий пример: наибольшее известное на сегодняшний день простое число обнаружено в январе 2016 и равно $2^{74\,207\,281} - 1$. В нём 22 338 618 цифр, и его позиционная запись немыслима. Приходится воспользоваться известным понятием *числа Мерсенна* $\mathsf{M}_n = 2^n - 1$, ввести букву M в цифровой алфавит и пользоваться для наибольшего известного простого числа именем $\mathsf{M}_{74\,207\,281}$.

Введение специальных имён для больших чисел было весьма распространено до воцарения позиционной системы счисления. Так, на Руси определённые степени десятки обозначались словами *тьма* (и даже *тьма тьмущая*, синонимичная *легиону*), *ворон* и *колода*. Относительно чисел, превосходящих 10^{50}, летописцы утверждали, что *и более сего несть человеческому уму разумети*.

Для степеней десятки есть специальные слова и в современных языках. Однако здесь международная стандартизация даёт сбой – взаимоотношения между именами *billion* и *миллиард* числа 10^9 не урегулированы. Имя *googol* и его русская калька *гугол* числа 10^{100} не являются общеизвестными; то же касается имён *googolplex* и *гуголплекс* числа $10^{10^{100}}$. Наконец, в современном английском есть слово *zillion*, не соответствующее никакому определённому числу, но применимое к числам, *которые несть уму разумети*.

2. Немного о бесконечном

В этом разделе мы выйдем за пределы натурального ряда и кратко обсудим некоторые плоды фантазии чистых математиков XIX-го века.

2.0. Порядки. *Порядком* на множестве X называется такая *структура* (более официальное название – *бинарное отношение*) $<$, что для любых $x_1, x_2 \in X$ либо $x_1 < x_2$, либо $x_2 < x_1$, либо $x_1 = x_2$. Требуется *транзитивность*: если $x_1 < x_2$ и $x_2 < x_3$, то $x_1 < x_3$. Множество вместе с фиксированным порядком на нём называется *упорядоченным*.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ вместе с обычным порядком $<$ доставляет пример упорядоченного множества. Запишем это следующим образом: $(\mathbb{N}, <) = \{\{0,1,2,3,...\}\}$. Следует обратить внимание на (нестандартные) сдвоенные скобки: порядок следования элементов, в отличие от обычного перечисления элементов множества, заключённых в одинарные скобки, существенен; множество натуральных чисел с *противоестественным* порядком $\{\{1,0,3,2,5,4,...\}\}$ как <u>упорядоченное</u> множество отлично от $(\mathbb{N}, <)$.

Ещё один обширных класс упорядоченных множеств – алфавиты естественных языков. Обычно (во всех известных автору случаях...) на них имеется исторически сложившийся порядок, например, $\{\{a, b, c, \dots , x, y, z\}\}$.

Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если в каждом его непустом подмножестве есть *наименьший* элемент (точное определение восстанавливается по языковым ассоциациям). Все приведённые только что примеры обладают этим свойством – как, разумеется, и все конечные множества. Множество *целых* чисел с обычным порядком упорядочено, но не вполне.

Не очень сложные размышления показывают, что два *конечных* вполне упорядоченных множества *одинаковы* как упорядоченные множества (на официальном языке – *изоморфны*, то есть допускают сохраняющую порядок биекцию) тогда и только тогда, когда равномощны. Для бесконечных вполне упорядоченных множеств, как мы сейчас убедимся, это далеко не так.

2.1. Новое сложение. Вполне упорядоченные множества можно *складывать*. Ограничимся примером:

$\{\{a, b \ldots, y, z\}\} + \{\{\text{А, Б}, \ldots , \text{Ю, Я}\}\} = \{\{a, b \ldots, y, z, \text{А, Б}, \ldots , \text{Ю, Я}\}\}$

Нетрудно понять, что сложение конечных вполне упорядоченных множеств не даёт ничего нового по сравнению с арифметикой натуральных чисел. Введём всё же имена $\mathbf{1}=\{\{1\}\}$, $\mathbf{2}=\{\{1,2\}\}$, $\mathbf{3}=\{\{1,2,3\}\}$,..

Вышесказанное выражается формулами вроде $\mathbf{1} + \mathbf{2} \simeq \mathbf{3}$, где $\simeq$ – знак изоморфизма (для установления которого требуется очевидный сдвиг в нумерации чисел из двухэлементного множества).

То, что произошло до сих пор, может показаться переписыванием жирным шрифтом простых истин, известных малым детям. Однако переход к <u>бесконечным</u> вполне упорядоченным множествам приводит к новым и весьма нетрадиционным объектам.

Введём стандартное (не очень удачное) имя $\omega = (\dot{\mathbb{N}}, <)$.

2.2. Бесконечности бывают разные. Поработаем немного со введёнными объектами. Очевидно, например, что $\mathbf{2} + \omega \simeq \omega$ – опять требуется очевидная перенумерация в левой части. Однако $\omega + \mathbf{2} = \{\{1,2,3, \ldots ,1',2'\}\}$; здесь подразумевается, что штрихованные числа превосходят любые нештрихованные. И, очевидно[26], $\omega + \mathbf{2} \not\simeq \omega$, поскольку в левом множестве есть *наибольший элемент*, а наибольшего натурального числа нет. Мы убедились в том, что $\omega + \mathbf{2} \not\simeq \mathbf{2} + \omega$.

2.3. Как сравнивать бесконечности? Введём символ $\prec$ для *префиксного неравенства*, связывающего вполне упорядоченные множества. По определению, одно вполне упорядоченное множество префиксно меньше другого, если меньшее не изоморфно большему, но изоморфно некоторому его *начальному отрезку* (сочтём очевидным определение последнего понятия). Так, $\{\{\alpha, \beta\}\} \prec \{\{\alpha, \beta, \gamma\}\}$, $\mathbf{5} \prec \mathbf{7}$ и т. д. Наиболее фундаментальна цепочка префиксных неравенств, охватывающая *все* конечные (непустые) вполне упорядоченные множества $\mathbf{1} \prec \mathbf{2} \prec \mathbf{3} \prec \mathbf{4} \prec \mathbf{5} \prec \ldots$

Опять может показаться, что обсуждается детская математика в чуть-чуть необычных обозначениях. Но выписанная цепочка может быть продолжена по-взрослому! Действительно,

$$\mathbf{1} \prec \mathbf{2} \prec \mathbf{3} \prec \mathbf{4} \prec \mathbf{5} \prec \ldots \prec \omega + \mathbf{1} \prec \omega + \mathbf{2} \prec \ldots \prec \omega + \omega$$

Двигаясь по копии натурального ряда, можно пройти бесконечность и двигаться дальше!

***

Мы познакомились с началами *теории ординалов*, построенной Георгом Кантором в 1883 году. Углубиться в неё можно, например, с помощью работы Верещагина и Шеня.[27]

Представляет ли эта теория, далеко не самая популярная в современной математике, интерес для лингвиста? Вряд ли – в рамках математики.

Да – в общефилософской и общекультурной перспективе.

В течение минувшего тысячелетия многократно повторялось, что Бесконечное непостижимо слабым человеческим разумом, а доступно лишь Богу. Характерные цитаты из Николая Кузанского (1401-1464):

> *Наш конечный разум, двигаясь путем уподоблений, не может... в точности постичь истину вещей.* Причина *в радикальной диспропорции между конечностью человеческого разума и бесконечностью, которую он хочет охватить.*

Творение Георга Кантора (после некоторого сопротивления воспринятое математическим сообществом) опровергло такого рода самоуничижительные рефлексии мыслящего человечества.

Примечания

1 *Крейдлин Г.Е., Падучева Е.В.* Взаимодействие ассоциативных связей и актуального членения в предложениях с союзом а // НТИ. Сер. 2. 1974. № 10. С . 31-37.

2 *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Теорема как вид текста: I. Понятность // Вестник РГГУ. 2007, № 8. С. 102-112; *Они же.* Теорема как вид текста: II. Когнитивные операции над формулировками теорем // Вестник РГГУ, 2011, № 11. С. 241-270.

3 Слова *один, два, три, четыре, пять* входят в 207-словный список Сводеша, а слова *один, два* – в 100-словный.

4 *Иванов Вяч. Вс.* Типология языков бассейна Амазонки. II. Числительные и счёт // Вопросы языкознания. 2005, № 5. С. 3-10.

5 Отметим, что распространённое среди нематематиков «определение» *множество называется конечным, если состоит из конечного количества элементов* содержит в себе порочный круг.

6 Понятие отображения является *первичным*, и не через какие ещё более фундаментальные не определяется.

7 Точнее, изъяты; в США, по общему мнению, провалилась построенная на теоретико-множественной основе так называемая программа new mathematics, которая была раскритикована (см. *Kline M.* Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics. St. Martin's Press, 1973), высмеяна и отвергнута; это, однако, свидетельствует не о ложности идеи, а о её плохой реализации.

8 По-видимому, русского эквивалента уместного слова *numeracy*, часто употребляющегося вместе с *literacy*, не существует.

9 Согласно отчёту OECD (Organisation for Economic Cooperation), около 9 миллионов британцев испытывают трудности с каждодневными расчётами, вроде определения по показаниям датчика, сколько литров бензина осталось в баке – см. *Kuczera M., Field S., Windisch H.C.* Building skills for all: a review of England. Policy insights from the survey of adult skills. OECD, 2016.

[10] *Данциг Т.* Числа – язык науки. М.: Техносфера, 2008.

[11] *Крейнович Е.А.* Гиляцкие числительные. Л., 1932. (Труды научно-исследовательской ассоциации Института народов Севера ЦИК СССР).

[12] В Интренете удалось обнаружить лишь непостижимую для нелингвиста дефиницию *формы местного-предложного падежа склонения прилагательных...*

[13] *Меннингер К.* История цифр. Числа, символы, слова. М.: Центрполиграф, 2011.

[14] *Xu Y., Regier T.* Numeral systems across languages support efficient communication: From approximate numerosity to recursion // Proceedings of the 36th Annual Meeting of the Cognitive Science Society / Eds. P. Bello et al. 2014.

[15] Следует обратить внимание на написание буквы $\mathbb{N}$, при котором, как положено в современных математических текстах, использован *blackboard bold* фонт, предназначенный для *мировых констант*; обычная буква N – это другой знак, и вполне допустима, например, запись $N \in \mathbb{N}$, означающая *N есть натуральное число*.

[16] Отличающейся от русской и американской.

[17] Определение не является общепринятым, и математики называют квазитексты просто *текстами*, но Г.Е. Крейдлин объяснил автору, что лингвисты требуют от текстов *осмысленности*.

[18] *Ван-дер-Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: Физматгиз, 1959; *Buck R.C.* Sherlock Holmes in Babylon // American Mathematical Monthly. 1980. № 87 (5). P. 335-345.

[19] См. английский перевод: *Sigler L.* Fibonacci's Liber Abaci: Leonardo Pisano's Book of Calculation. Springer-Verlag, 2003.

[20] Автор встретился с единственным исключением: после путешествий по Армении, Израилю, Японии, в которых глаз европейца отдыхает на привычных цифрах среди неизвестных букв, в Иране были обнаружены написания цифр, которые с трудом можно угадать. Интересно, что при этом математика в современном Иране находится на довольно высоком уровне и что даже в годы международной изоляции иранские математики сохраняли тесные контакты с европейскими и американскими коллегами.

[21] Понятие идеального компьютера формализуемо на основе *тезиса Чёрча*.

[22] *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов // Успехи математических наук. 1970. Том 25, вып. 6 (156). С. 85-127.

[23] См. *Архимед.* Исчисление песчинок (Псаммит). М.-Л.: ГТТИ, 1932. 108 с.

[24] В так называемом *моле* вещества, определение которого не всегда понятно далёкому от естественных наук человеку.

[25] По пояснениям Международной электротехнической комиссии, название *терабайт* общепринято, но неверно; вместо приставки *тера-* следует употреблять *теби-*.

[26] $\not\simeq$ – знак *не*изоморфности.

[27] *Верещагин Н.К., Шень А.* Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2012.