УДК 81`367

Формальный язык геометрии как знаковая система II. Расширенный синтаксис

Григорий Е. Крейдлин
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, gekr@iitp.ru

Георгий Б. Шабат
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, george.shabat@gmail.com

Аннотация. В статье излагается вторая часть синтаксического компонента формального языка геометрии (первая часть опубликована в 2017 г.). Среди единиц расширенного синтаксиса выделяются, во-первых, единицы элементарного синтаксиса, а во-вторых, единицы, полученные из элементарных с помощью ряда специальных операций. Эти операции получили название редукций. Их цель – укоротить синтаксически правильные формулы и тем самым облегчить их восприятие. Выделены два типа редукций: осуществляемые на основе универсальных логических законов и вводимые в язык специальные новые знаки. В конце статьи обсуждаются выразительные возможности синтаксиса формального языка геометрии и строится фрагмент расширенного синтаксиса, относящийся к теории треугольников и четырехугольников.

Ключевые слова: геометрия, расширенный синтаксис, логическая редукция, нелогическая редукция, знак, терм, предикат, формула, выразительные возможности, треугольник, четырехугольник

Для цитирования: *Крейдлин Г.Е, Шабат Г.Б.* Формальный язык геометрии как знаковая система. II. Расширенный синтаксис // Вестник РГГУ. Серия «История. Филология. Культурология. Востоковедение». 2018. № 12 (45). С. 122–144.

The formal language of Geometry as a semiotic system. Part II. Advanced syntax

Grigoii E. Kreydlin

Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, gekr@iitp.ru

Georgii B. Shabat

Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, george.shabat@gmail.com

Abstract. The paper constitutes the second part of the article of 2017, and is devoted to the advanced syntax of the formal language of Geometry. The units of the advanced syntax are divided in two groups: the elementary syntactic units and the units that are built on the elementary ones by special operations called reductions. Those operations are assigned to reduce regular-formed expressions and thus to facilitate their perception. The author specifies two types of reductions being made on the basis of the universal laws of formal logic and being introduced into the language of special new items. At the end of the article the expressive power of the advanced syntax are discussed. The exemplified fragment of the advanced syntax related to the theory of triangles and quadrilaterals is presented.

Keywords: geometry, advanced syntax, logical reduction, non-logical reduction, sign, term, predicate, formula, expressive power, triangle, quadrilateral

For citation: Kreidlin GE., Shabat GB. The formal language of Geometry as a semiotic system. Part II. Advanced syntax. *RSUH / RGGU Bulletin. "History. Philology. Cultural Studies. Oriental Studies" Series.* 2018;12(45):122-144.

Введение

Настоящая статья является продолжением статьи «Формальный язык геометрии как знаковая система I» [1], посвященной элементарному синтаксису формального языка геометрии. Напомним читателю наиболее важные сведения об элементарном синтаксисе. В нем нами были выделены три части, в одной из которых описываются синтаксические единицы – составляющие этого синтаксиса, а в двух других – синтаксические отношения между ними и некоторые синтаксические операции над ними.

Перечислим элементарные синтаксические единицы формального языка геометрии:

- Простые термы трех сортов: точки, прямые, векторы. Все простые термы являются аналогами существительных естественного языка.
- Сложные термы пяти сортов: $(\mathfrak{a}_{\bullet}\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}\bullet\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}^{\bullet}\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}!\mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A}^{\to}\mathfrak{B})$, причем (по порядку) два из этих видов термов соответствуют именам точек, два – именам прямых и один – имени вектора.

Знак «нижняя точка» $_{\bullet}$ ставится между именами двух непараллельных прямых, и образующийся терм является именем точки пересечения этих прямых. Знак «средняя точка» $\bullet$ ставится между именами вектора и точки, и образующийся терм является именем точки, образующейся в результате применения вектора к исходной точке. Знак «верхняя точка» $^{\bullet}$ ставится двумя разными точками, и образующийся терм является именем прямой, проходящей через эти точки.

Восклицательный знак ставится между именем точки и именем прямой, и образующийся терм является именем прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Наконец, знак «стрелка» $^{\to}$ ставится между двумя точками, и образующийся терм имеет смысл вектора, переводящего первую из них во вторую.

- Простые предикаты двух типов: равенство = и инцидентность $\in$. Они представляют собой аналоги глаголов и кратких прилагательных естественного языка. Равенство определено для пары точек, пары прямых, пары векторов. В случае точек и в случае прямых слово *равенство* синонимично слову *совпадает*, между тем как про совпадающие векторы говорить не принято. Инцидентность, обозначаемая символом $\in$, – это предикат, задающий отношение между точками и прямыми. У имени этого предиката есть несколько синонимов и конверсивов, например, *проходить через, лежать на, быть расположенной на* и др.
- Сложные предикаты образуются из простых применением к ним логических операций, к которым относятся дизъюнкция, конъюнкция, отрицание и навешивание кванторов общности и существования.

Помимо элементарных синтаксических единиц, в формальном языке геометрии есть специальные значки нескольких видов:

- насечка I (насечка может стоять при переменной в качестве нижнего индекса, причем насечек может быть сколько угодно);
- скобки ( ) и [ ]; круглые скобки используются для аргументов предикатов и для сложных термов, а квадратные – для заключения в них аргументов логических операций;
- запятая , – используется при перечислении элементов конечного множества;
- пять описанных выше значков геометрических операций ˙ • . ! $\vec{}$;
- пять логических символов ∀ ∃ ¬ ∧ ∨.

В нашем формальном языке геометрии приняты следующие соглашения: заглавные буквы закрепляются за точками, строчные – за прямыми, а векторы обозначаются строчными буквами с надстрочными стрелками.

Скажем несколько слов о соотношении формального языка геометрии с языком школьной геометрии. Пока мы имели дело с элементарным синтаксисом формального языка геометрии, мы ничего не говорили о лексике этого языка, и это не случайно. Дело в том, что лексика, которая использовалась при описании элементарного синтаксиса, почти ничем не отличается от лексики школьного языка геометрии (различие касается лишь слова *вектор* и некоторых выражений с ним).

В настоящей работе, говоря о новых (по сравнению с ранее введенными) синтаксических средствах нашего языка, нам с неизбежностью придется использовать также и новые слова и выражения. Все эти языковые единицы по форме или по смыслу отличаются от слов и словосочетаний привычного языка школьной геометрии. Новые единицы будут вводиться по мере расширения синтаксиса. В результате модифицируется ряд школьных понятий: плоскости, треугольника, четырехугольника, параллелограмма, трапеции и некоторые другие. Такая модификация соответствует современным представлениям о геометрии как науке о <u>возможных</u> пространствах (ср. с концепциями *возможных миров* в лингвистике и логике, см. [2], [3]). При введении новых понятий и терминов, которые отличаются от традиционных представлений, развиваемых в современной школе, строится теория, для которой геометрия Евклида является лишь одной из возможных моделей. Используемые в этой теории слова и словосочетания нередко понимаются не так, как в школе. Мы, однако, по возможности сохраним для вводимых понятий привычные языковые формы, а смыслы вводимых единиц будем всякий раз уточнять.

Еще одно существенное отличие лексики нашего формального языка от лексики школьной геометрии состоит в том, что у нас не будет многих привычных для читателя понятий. Прежде всего, речь идет о величинах – расстояниях, длинах, углах и площадях. Нет также качественных понятий, связанных с перпендикулярностью, порядком точек на прямой и разбиением плоскости на полуплоскости. Таким образом, лексика описываемого нами языка геометрии относительно бедна. Однако сказанное еще не означает бедности самого языка. Во-первых, его лексику можно расширить так, что она станет не беднее лексики языка школьной геометрии. Во-вторых, как мы покажем далее, синтаксис формального языка геометрии по своим выразительным возможностям не уступает синтаксису школьного языка.

У читателя могут возникнуть вопросы: «Почему авторам понадобилось менять язык, освоенный фактически с детских лет?» и «Зачем нужен какой-то другой язык, непривычный и трудно усваиваемый, в котором даже такие слова, как *треугольник, параллелограмм* и *окружность*, имеют необычные значения?» Для этого есть несколько причин. Одна из них состоит в том, что мы хотим представить язык геометрии именно как язык, то есть описать его лексику и грамматику в системном и строгом виде, тогда как язык школьной геометрии не охарактеризован ни лингвистически, ни как формальная структура. Лингвистическое описание этого языка предполагало бы, по крайней мере, две книги, содержащие отдельно лексику и отдельно грамматику. Между тем ни лексические единицы школьной геометрии, ни классы или ряды таких единиц (синонимы, фразеологизмы, диалектизмы, гипонимы, гиперонимы и др.), насколько нам известно, системно не описаны – нет даже словарей математических терминов, удовлетворяющих современному состоянию лингвистического и математического знаний. Не существует и грамматики этого языка. В то же время наш формальный язык предполагает строгую и системную репрезентацию всех его слов и синтаксических конструкций (хотя и изложенную не в лексикографическом формате). Решение этой задачи было начато нами в работе [4]; более сложные слова и синтаксические конструкции описываются ниже. Из трех рассмотренных нами ранее языков геометрии только для формального языка возможно такое описание.

Что касается структуры рассматриваемого здесь языка геометрии, то он опирается на вполне определенное трехсортное исчисление предикатов первого порядка (о многосортных исчислениях предикатов [5]). Это позволяет при анализе и описании этой структуры опираться на готовый понятийный и инструментальный аппарат математической логики, то есть использовать общепринятые термины, определения и результаты. Примеры такого использования см. в разделе 1 и далее.

Остальные причины, послужившие нам основанием для введения формального языка геометрии, связаны с *логической семантикой*, то есть с *интерпретациями* слов и других синтаксических единиц, в том числе с интерпретациями единиц расширенного синтаксиса[1].

1. Единицы расширенного синтаксиса и операции над ними

§ 1. Предварительные замечания

К единицам расширенного синтаксиса относятся, во-первых, все единицы элементарного синтаксиса, перечисленные во Введении, а во-вторых, единицы, полученные из элементарных с помощью ряда операций над формулами, которые мы называем *редукциями*. Назначение редукций – сделать короче синтаксически правильные формулы с целью упрощения их восприятия и введения в язык некоторых содержательных понятий и терминов. Редукции осуществляются либо на основе универсальных логических законов, либо введением в язык специальных знаков.

Следуя традициям классической математической логики, точнее ее раздела «Исчисление предикатов первого порядка», мы выделяем два вида редукций – логические и нелогические. Описание некоторых редукций требует введения ряда вспомогательных понятий, которым посвящены § 2 и § 3.

§ 2. Логические редукции

К логическим редукциям относятся редукции, которые не зависят от языка предикатов первого порядка. В отличие от нелогических редукций, о которых речь пойдет в § 3, логические редукции служат исключительно для упрощения записи формул. Такие редукции задаются при помощи правил, составляющих список из нескольких частей, см. раздел 3.

---

[1] О единицах расширенного синтаксиса и соотношениях между ними см. далее. О логической семантике рассматриваемого языка см. нашу статью [6].

Перечеркивания

В расширенном синтаксисе нашего формального языка разрешается перечеркивать некоторые знаки. С помощью этого вида логической редукции перечеркиваются знаки *равенства* = и *инцидентности* ∈, входящие в множество знаков элементарного синтаксиса формального языка. Кроме того, могут перечеркиваться знаки двуместных предикатов, вводимых в расширенный синтаксис (см. об этом ниже). Так обозначаются отрицания всех двуместных предикатов. Например, запись $P \neq Q$ с перечеркнутым знаком равенства читается как «точки P и Q различны» (или каким-то синонимичным способом), а запись $P \notin l$ как «точка P не лежит на прямой l» (или синонимично).

Введение знаков импликации и равносильности

Знаки импликации ⇒ и равносильности ⇔ не включены нами в состав основных логических знаков алфавита языка геометрии. Причина этого – в их «избыточности». Дело в том, что в классической математической логике действуют следующие правила равносильной замены:

$$[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}] :\equiv [[\neg\, \mathcal{A}] \vee \mathcal{B}]$$

$$[\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}] :\equiv [\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}] \wedge [\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}]$$

Обратим внимание на то, что в этих правилах используется особый знак – знак метаязыка :≡. С его помощью в наш язык вводятся новые знаки (в данном случае ⇒ и ⇔, в результате чего левая часть (до знака :≡) является редукцией правой части. Знак :≡ мы будем называть *знаком редукции*.

Прежде чем рассказать еще об одном виде логической редукции, нам понадобится ввести одно важное понятие.

§ 3. Синтаксическая эквивалентность формул

На множестве формул нашего языка мы считаем заданным фундаментальное отношение, которое называется отношением синтаксической эквивалентности (см. [7]) и обозначается знаком≡, родственным введенному выше знаку метаязыка :≡ (см. § 2). Синтаксическая эквивалентность формул $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ записывается в виде $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}'$ и читается как $\mathcal{F}$ *синтаксически эквивалентна* $\mathcal{F}'$ (или синонимичным образом). Важно подчеркнуть, что ни понятие синтаксической эквивалентности, ни обозначающий его знак $\equiv$ не принадлежат собственно языку. Это – единицы метаязыка синтаксического описания нашего языка геометрии.

Примерами синтаксически эквивалентных формул являются формулы $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$, что записывается на метаязыке как $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ (коммутативность конъюнкции). А вот еще примеры (в скобках приводятся названия свойств отдельных операций – для первых двух примеров, а также пары и тройки операций – для последних двух):

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ (коммутативность дизъюнкции);

$[\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}] \wedge \mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \wedge [\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}]$ [ассоциативность конъюнкции);

$[\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \wedge \mathcal{C} \equiv [\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}] \vee [\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}]$ (один из видов дистрибутивности);

$\neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \equiv [\neg[\mathcal{A}]] \wedge [\neg[\mathcal{B}]]$ (один из законов де Моргана).

О синтаксической эквивалентности[2] формул, содержащих кванторы, речь пойдет ниже.

Отметим, что синтаксическая эквивалентность формул, вообще говоря, не означает их *синонимии* (более того, языковая синонимия не является математическим понятием). Например, формула $\neg[[P \in a] \wedge [P \in b]]$, которая может читаться *как неверно, что точка лежит на обеих прямых a и b*, несинонимична синтаксически эквивалентной ей формуле $[\neg[P \in a]] \vee [\neg[P \in b]]$, читаемой как *точка P не лежит на прямой a, или точка P не лежит на прямой b*. Первая из двух приведенных фраз удовлетворительна с языковой точки зрения, а вторая – нет. Дело в том, что союз *или* предполагает здесь странный выбор из двух альтернатив.

§ 4. Логические редукции и отношение синтаксической эквивалентности

До сих пор мы рассматривали логические редукции, в которых не использовалось отношение синтаксической эквивалентности. Ниже описываются редукции, основанные на этом отношении.

Замена формулы на синтаксически эквивалентную

Из множества синтаксически эквивалентных подформул данной формулы разрешается выбирать ту, которая является наиболее подходящей с какой-либо точки зрения (краткости, понятности,

---

[2] Понятие синтаксической эквивалентности играет важную роль при переводе с естественно-подобного языка геометрии на формальный и обратно. Об этом мы подробно расскажем в работах [8], [9].

легкости восприятия, удобства прочтения, т. п.), и подставлять ее в формулу на место исходной подформулы.

Например, из пары логически эквивалентных формул, одна из которых $\neg[\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2]$, а другая $[\neg\mathcal{F}_2] \wedge \neg[\mathcal{F}_2]$, более легкой для восприятия является вторая; она легче читается и понимается. Действительно, если $\mathcal{F}_1$ – это формула, утверждающая совпадение точек $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}$, то есть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}$, а $\mathcal{F}_2$ – о совпадении точек $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}$, то есть $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$, то формула $\neg[\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2]$ читается как *неверно, что точка B совпадает с точкой A_1 или с точкой A_2*, тогда как формула $[\neg\mathcal{F}_2] \wedge \neg[\mathcal{F}_2]$ читается как *точка B отлична и от точки A_1, и от точки A_2*. Очевидно, что второе прочтение более идиоматично и лучше отвечает нормам русского языка, чем первое.

Замена связанных переменных

В статье [10] были введены понятия свободного и связанного вхождения переменных в данную формулу. Оба понятия относятся к синтаксису кванторных выражений. *Любую связанную квантором переменную разрешается заменять на любую другую во всей области действия квантора*. В результате такой замены получается формула, которую мы определяем как *синтаксически эквивалентную исходной*. Как и в предыдущих случаях логической редукции, приведем примеры ситуаций, в которых желательны (а иногда и необходимы) замены связанных переменных.

(а) Строя различные логические комбинации формул с кванторными выражениями, содержащими одни и те же связанные переменные, мы можем в результате получить формулу, в которой одна и та же переменная встречается в разных частях. Это обстоятельство нередко затрудняет понимание.

Рассмотрим две формулы:

$$\mathcal{F} :\equiv [\exists X[[X \in (\mathcal{A}^{\bullet} C)] \wedge [X \in (\mathcal{B}^{\bullet} D)]]]$$

и

$$\mathcal{F}' :\equiv [\exists X[[X \in (\mathcal{A}'^{\bullet} C)] \wedge [X \in (\mathcal{B}'^{\bullet} D)]]]$$

Эти формулы не адресованы человеку, и потому для их восприятия весьма желателен их перевод на язык чертежей (об этом языке см. [4]). Один из возможных переводов таков:

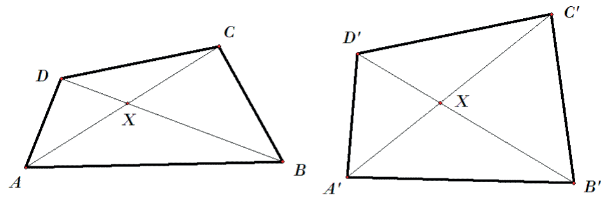

Рис. 1

На естественно-подобном языке (о нем см. в [10]) формула $\mathcal{F}$ говорит о существовании точки, принадлежащей обеим диагоналям четырехугольника $\mathcal{ABCD}$, то есть об их непараллельности, а формула $\mathcal{F}'$ – о существовании точки, принадлежащей обеим диагоналям четырехугольника $\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{D}'$.

Здесь особенно ясно видно неудобство, затрудняющее понимание и проистекающее от использования одной и той же буквы X в двух разных смыслах – на одном чертеже это точка пересечения диагоналей одного четырехугольника, а на другом – другого. Сформулированное выше правило замены связанных переменных в области действия квантора позволяет избавиться от этого неудобства, переименовав одну из связанных переменных, то есть X, в любой из формул. Подчеркнем, что традиции оформления математических текстов и законы дружественной коммуникации выделяют наиболее предпочтительное переименование, а именно в данном случае замену в формуле $\mathcal{F}'$ переменную X на X':

$$\mathcal{F}' :\equiv [\exists X' \, [[X' \in (\mathcal{A}' {}^\bullet C)] \wedge [X' \in (\mathcal{B}' {}^\bullet D)]]]$$

(б) Можно выделить еще один класс ситуаций, в которых желательны замены связанных переменных. Это ситуации, когда на множестве связанных переменных устанавливаются какие-то содержательные соотношения. В качестве примера рассмотрим следующую теорему: *Для любого треугольника найдется его сдвиг*[3]*, при котором одна из вершин треугольника окажется в любой заданной наперед точке*. На языке чертежей этот геометрический факт можно проиллюстрировать так, как это сделано на рисунке 2.

Условность данного чертежа состоит в том, что роль «наперед заданной» точки (на чертеже A_1) нельзя выделить без привлечения дополнительных средств. Вектор $\vec{v}$ – это вектор, определяющий данный сдвиг.

---

[3] Под сдвигом треугольника понимается применение одного и того же вектора ко всем его вершинам.

На формальном языке эту теорему естественно представить как $\forall \mathcal{A};\mathcal{B};\mathcal{C};\mathcal{A}_1 \exists \vec{v};\mathcal{B}_1;\mathcal{C}_1[[\vec{v} \bullet \mathcal{A} = \mathcal{A}_1] \wedge [v \bullet \mathcal{B} = \mathcal{B}_1] \wedge [v \bullet \mathcal{C} = \mathcal{C}_1]$.

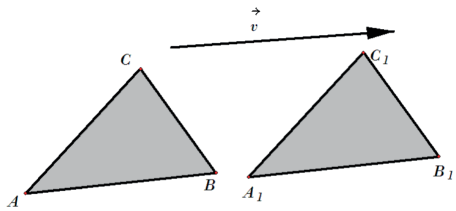

Рис. 2

В этой записи используются естественные сокращения, в частности опускаются некоторые кванторы и скобки.

На приведенном рисунке 2 выделены две тройки точек, каждая из которых интерпретируется как треугольник. На естественно-подобном языке (о нем см. [4]) слово *треугольник* понимается как множество его вершин.

Приведенная формальная запись сформулированной ранее теоремы воспринималась бы значительно хуже, если бы в обозначениях точек (которые и представляют собой связанные переменные) не было бы отражено соответствие между вершинами исходного и сдвинутого треугольника. Особенно ясно это соответствие видно на приведенном рисунке 2.

Введем особый знак «обратная стрелка» $\leftarrow$. Он обозначает операцию *замены одной связанной переменной в составе данной формулы на другую того же сорта*, то есть точку на точку, прямую на прямую, вектор на вектор. При этом новая переменная не должна входить в данную формулу.

Мы вводим запись $\mathcal{A}_{\xi\leftarrow\eta}$ где $\mathcal{A}$ – произвольная формула, в которую входит переменная ξ, причем как связанная, а переменная η того же сорта, что и ξ, не входит в $\mathcal{A}$. Нижний индекс $_{\xi\leftarrow\eta}$ при формуле с означает обязательную замену всех вхождений в нее «старой» переменной ξ на «новую» переменную η.

Существование и единственность

Последний из рассматриваемых нами видов логической редукции, основанный на отношении синтаксической эквивалентности, требующий замены связанных переменных и вводящий новый знак в наш формальный язык, – это преобразование двух формул, одна из которых утверждает существование объекта, а другая – его единственность, в одну.

Результат такого преобразования обозначается особым знаком ∃!.. Приведем формальную запись данного преобразования:

$$[\exists!\xi[\mathcal{A}]] := [[\exists\xi[\mathcal{A}]] \wedge [\forall\eta[\mathcal{A}_{\xi\leftarrow\eta}]] \Rightarrow [\xi = \eta]$$

Напомним, что буквами ξ и η обозначаются переменные любого из трех рассматриваемых нами сортов, а буква $\mathcal{A}$ обозначает произвольную формулу. Приведенная запись подразумевает, что переменная ξ входит в формулу с связанно, а переменная η того же сорта не входит в формулу $\mathcal{A}$. Первый конъюнкт выражает существование объекта, а второй – его единственность.

§ 5. Нелогические редукции

Все нелогические редукции обладают следующим общим свойством: они расширяют исходный язык, вводя в него новые термы и предикаты. Назначение таких редукций – упрощение записи формул, подобное тому, как слово *теща* упрощает именную группу *мать жены*. Приведем три примера нелогических редукций. Первые два – это редукции формул, вводящих в наш язык новые двухместный и трехместный предикаты, а именно *параллельность*, который определен на множестве пар прямых, и *коллинеарность*[4], который определен на множестве троек упорядоченных точек.

Параллельность двух прямых означает отсутствие у них общей точки:

$$[l \parallel m] :\equiv [\neg[\exists P\, [[P \in l] \wedge [P \in m]]]]$$

Коллинеарность трех точек, или их свойство лежать на одной прямой, вводится следующей редукцией:

$$[\mathfrak{col}(A,B,C)] :\equiv [[A \neq B] \wedge [A \neq C] \wedge [B \neq C] \wedge [\exists l[[[A \in l] \wedge [[B \in l] \wedge [[C \in l]]]]].$$

Третий, более сложный, пример иллюстрирует редукцию, вводящую в наш язык новый терм – *точка пересечения диагоналей четырехугольника*. При этом под *четырехугольником* понимается на самом деле множество из четырех точек (*вершин* четырехугольника) вместе с заданным на нем так называемым *циклическим порядком*. Если вершины четырехугольника – это множество $\{A, B, C, D\}$,

[4] Слово *коллинеарность* употребляется нами не так, как в школьной математике (в школе принято говорить о коллинеарности векторов).

то циклический порядок можно представлять себе как порядок обхода вершин четырехугольника. Естественным из возможных циклических порядков принято считать «лексикографический», то есть $A \to B \to C \to D$. По определению этот циклический порядок совпадает с циклическими порядками $B \to C \to D \to A$, $C \to D \to A \to B$ и $D \to A \to B \to C$. Здесь запись $X \to Y$ означает переход от вершины X к «следующей» вершине Y.

Указанный порядок обхода разбивает шесть прямых, проходящих через пары вершин, на четыре *стороны* $(A \bullet B)$; $(B \bullet C)$; $(C \bullet D)$; $(D \bullet A)$ и две *диагонали* $(A \bullet C)$; $(B \bullet D)$[5].

Терм *точка пересечения диагоналей четырехугольника* вводится в язык следующей нелогической редукцией:

$$\mathfrak{intersectDiag}(A,B,C,D) :\equiv ((A^{\bullet} C) \bullet (B^{\bullet} D))$$

Мы полагаем, что читатель увидел различие между привычным ему со школы понятием четырехугольника и понятием четырехугольника, введенным нами. Введенный терм определен не всюду, то есть не для любых четверок точек. Очевидная причина этого заключается в том, что некоторые точки могут совпадать или быть коллинеарными – назовем «четырехугольники» с такими вершинами *вырожденными*. Другая, менее очевидная, причина состоит в том, что даже у невырожденного четырехугольника диагонали могут не пересекаться – см. об этом ниже.

3. Выразительные возможности формального языка геометрии и некоторые способы их расширения

§1. Общая характеристика формального языка геометрии и его выразительных возможностей

Рассматриваемый нами формальный язык геометрии напоминает семантический язык Анны Вежбицкой [11], среди прочего, своей минимальностью. И исходный лексический состав нашего языка, и его грамматика исключительно скудны, а расширение выразительных возможностей языка и его объяснительной силы достигается введением новых имен и предикатов, которые строятся на базе исходных. Такие новые единицы своего семантического языка А. Вежбицкая называет *молекулами*. Они строятся на базе *семантических примитивов*, или *семантических атомов*. Еще одна

---

[5] В отличие от школьной геометрии, сторонами четырехугольника у нас являются прямые, а не отрезки.

аналогия с языком А. Вежбицкой состоит в том, что и у нее, и у нас набор исходных единиц различается по *сортам*[6]. На этом, однако, прямая аналогия языка А. Вежбицкой с нашим языком заканчивается. В частности, у нас результатом расширения запаса термов языка являются термы тех же сортов (точки, прямые, векторы), а результатом «расширения» запаса предикатов является переименование некоторых сложных формул, уже имеющихся в нашем языке. Между тем у А. Вежбицкой виды семантических единиц, построенных из примитивов, могут отличаться от видов исходных единиц. Например, среди исходных единиц нет группы, соответствующей артефактам типа велосипед, скрипка, бумага, т. п.

Обратим внимание на то, что ни введение новых имен термов, ни введение новых имен предикатов не увеличивают выразительных возможностей нашего языка. Они лишь упрощают, в частности укорачивают, запись сложных термов и предикатов. При этом некоторые из редуцированных синтаксических единиц оказываются семантически вполне содержательными, поскольку соответствующие редукции вводят языковые единицы и стоящие за ними понятия, важные для понимания формулировок теорем и перевода с формального языка на естественно-подобный (о естественно-подобном языке геометрии см. [4]). Иными словами, такие редукции – это не чисто синтаксические операции.

Одним из способов увеличить выразительную силу нашего языка было бы введение в его элементарный синтаксис новых сортов переменных. В частности, в нашем языке нет понятия числа, или скаляра, как отдельного сорта переменных. Поэтому в нем нет средств, позволяющих использовать координаты в формулировках теорем. Введение Рене Декартом[7] координат в геометрию – это одно из важнейших достижений математики и философии минувшего тысячелетия, и только в целях упрощения языка мы отказались в данной работе от введения этого сорта переменных. Другой сорт переменных, являющийся ключевым для современной геометрии, – это *преобразования*. Введение преобразований в элементарный синтаксис потребовало бы еще больших интеллектуальных усилий, места и времени, поэтому мы, как и в предыдущем случае, ограничились лишь упоминанием этого сорта переменных.

Поскольку, как мы уже писали в ряде статей, можно выделить пять языков геометрии, в том числе язык координат и язык преоб-

---

[6] А. Вежбицкая говорит в подобных случаях о разных *видах*, или *группах*, семантических примитивов.

[7] Рене Декарт (1596–1650) – выдающийся французский математик и философ, автор знаменитого «Рассуждения о методе» (1637).

разований, которые еще не были нами описаны. Этим двум языкам и основным понятиям, на которых они построены, мы посвятим отдельные работы.

В следующем разделе мы покажем, что, несмотря на кажущуюся бедность выразительных синтаксических средств рассматриваемого формального языка, его объяснительная сила достаточно велика. На нем можно сформулировать целый ряд содержательных понятий и утверждений. Чтобы это показать, обратимся к двум разделам геометрии, посвященным простейшим «фигурам».

Фрагмент расширенного синтаксиса: введение в теорию треугольников и теорию четырехугольников

Поскольку в нашем формальном языке нет средств для обозначения переменных типа «натуральное число», мы не можем построить теорию многоугольников с произвольным числом сторон. Иными словами, мы не можем определить понятие «n-угольник» для переменного натурального n. Однако средств нашего языка вполне достаточно, чтобы говорить о треугольниках, четырехугольниках и т. д.

Понятие четырехугольника было введено выше, а треугольником мы будем теперь называть произвольную тройку <u>неколлинеарных</u> точек. Подчеркнем, что используемые здесь понятия треугольника и четырехугольника не совпадают с соответствующими понятиями школьной геометрии. Возможно, что введенные понятия следовало бы поэтому на письме передавать синонимичными им словами ТРЕУГОЛЬНИК и ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК. Поскольку мы школьной геометрии в дальнейшем касаться не будем, мы позволим себе пользоваться словами *треугольник* и *четырехугольник* в указанном выше смысле.

Введем еще одну нелогическую редукцию:

$$[\mathrm{tri}(A,B,C)] :\equiv [[A \neq B] \wedge [[A \neq C] \wedge [[B \neq C] \wedge [\neg[\mathrm{col}(A,B,C)]]$$

Ее результат – трехместный предикат $\mathrm{tri}(A,B,C)$ – читается как «три точки A, B и C называются вершинами треугольника, если они неколлинеарны». Иными словами, хотя понятие треугольника остается неопределенным, вводится фразеологическое сочетание «вершины треугольника».

Сторонами треугольника с вершинами A, B и C называются прямые $(A \bullet B)$, $(A \bullet C)$ и $(B \bullet C)$. Как и в школьной геометрии, сторона $(B \bullet C)$ называется *противолежащей* вершине A и т. п.

Итак, хотя понятия треугольника у нас нет, мы определили два фразеологических сочетания, а именно «вершины треугольника» и «стороны треугольника». Для формулировки некоторых содержательных определений и теорем о треугольниках введем понятие *параллелограмма* как особого вида четырехугольников.

Для этого сначала определим предикат «быть вершинами четырехугольника»[8]:

$$\mathfrak{quad}(A,B,C,D) :\equiv [[A \neq B] \wedge [A \neq C] \wedge [A \neq D] \wedge [B \neq C] \wedge [B \neq D] \wedge [C \neq D] \wedge \wedge [\neg[\mathfrak{col}(A,B,C)]] \wedge [\neg[\mathfrak{col}(A,B,C)] \wedge [\neg[\mathfrak{col}(A,B,C)] \wedge [\neg[\mathfrak{col}(A,B,C)]$$

Чтение этой сложной записи[9], раскрывающей содержание вводимого предиката, таково: «четыре точки называются вершинами четырехугольника, если никакие три из них не коллинеарны». В дальнейшем мы для краткости мы вместо сочетаний *вершины треугольника/четырехугольника* и *стороны треугольника/четырехугольника* мы будем говорить просто *треугольник* и *четырехугольник*.

Стороны четырехугольника называются *противоположными*, если они не содержат общих вершин. Например, у четырехугольника с вершинами P, Q, R, S и лексикографическим циклическим порядком $P \to Q \to R \to S$ пары противоположных сторон это $(P \bullet Q)$; $(R \bullet S)$ и $(Q \bullet R)$; $(P \bullet S)$.

Параллелограммом, как и в школе, называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны. Нелогическая редукция, вводящая понятие параллелограмма, это

$$[\mathfrak{para}(A,B,C,D)] :\equiv [\mathfrak{quad}(A,B,C,D)] \wedge [(A \bullet B) || [(C \bullet D)] \wedge [(B \bullet C) || [(D \bullet A)]$$

Фрагмент расширенного синтаксиса: некоторые точки и линии в треугольнике

Выразительных возможностей нашего, кажущегося на первый взгляд весьма бедным, языка вполне достаточно для формулировок многих содержательных определений и теорем. В данном раз-

---

[8] Напомним, что на множестве вершин четырехугольника определен циклический порядок. Так, на множестве $\{A, B, C, D\}$ таких порядков шесть: $A \to B \to C \to D$, $A \to B \to D \to C$, $A \to C \to B \to D$, $A \to C \to D \to B$, $A \to D \to B \to C$, $A \to D \to C \to B$.

[9] На естественно-подобном языке геометрии данная запись читается так: четыре точки называются вершинами четырехугольника, если никакие три из них не коллинеарны. Упрощение прочтения и перевода на естественно подобный язык данной записи достигается за счет *симметричности* вхождения переменных в формулу. О роли симметрии в формулировках теорем и об использовании симметрии для сокращения длинных формулировок см. [12].

деле мы проиллюстрируем этот тезис применительно к геометрии треугольника.

Несмотря на отсутствие в синтаксисе нашего языка чисел и расстояний, оказывается возможным ввести понятие средней точки между двумя точками (ср. английское midpoint):

$$[M := \mathfrak{mid}(A,B)] :\equiv [\forall X[\forall Y\,[[X \notin (A^{\bullet}B)] \wedge [Y \notin (A^{\bullet}B)]] \wedge [\mathfrak{para}(A,X,Y,B)]] \Rightarrow [M = (A^{\bullet}B) \bullet (X^{\bullet}Y)]]]$$

В этой записи наряду с введенным ранее знаком редукции :≡ используется еще один знак метаязыка синтаксиса, а именно :=. Его мы называем *знаком наименования*, или *переименования*[10]. Слева от этого знака ставится вводимое новое имя терма, а справа – либо непоименованный объект (в случае наименования), либо старое имя того же терма (в случае переименования).

Обсуждаемая запись[11] читается так: *серединой между двумя точками называется точка пересечения двух диагоналей любого параллелограмма, противоположными вершинами которого являются данные точки.*

Одним из средств, облегчающих понимание формул языка геометрии, являются сопровождающие их чертежи. Чертеж, отвечающий приведенной формуле, таков (циклический порядок вершин $A \to Y \to B \to X$:

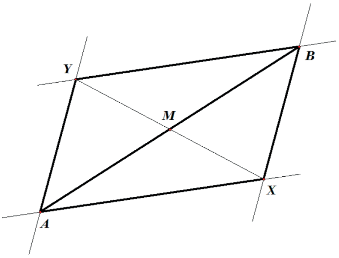

Рис. 3

В рассматриваемой формуле имеется терм $(A \bullet B) \bullet (X \bullet Y)$, который содержит знак «нижний кружок» операции «пересечение прямых». Использование этого знака, однако, не означает, что прямые обязательно пересекаются, то есть что точка их пересечения существует. Вопреки сложившимся у читателя со школы представ-

[10] В программировании этот знак называют *знаком присваивания*.

[11] Ту же формулу можно было бы записать при помощи введенного выше терма intersecttiag, но запись была бы длиннее.

лениям, диагонали параллелограмма $A \bullet B$ и $X \bullet Y$ в некоторых экзотических интерпретациях нашего формального языка могут быть параллельны[12]. В таких интерпретациях понятие середины между двумя точками не определено. Введенное нами понятие середины между двумя точками A и B не всегда однозначно определяет точку $\mathfrak{mid}(A,B)$. В некоторых интерпретациях, столь же экзотических, как и упомянутые в предыдущем комментарии, точка $\mathfrak{mid}(A,B)$ может меняться в зависимости от выбранной вспомогательной вершины X параллелограмма.

В «обычной» школьной планиметрии, во-первых, диагонали параллелограмма никогда не параллельны, а во-вторых, наша формула определяет единственную точку, которая и является «настоящей» серединой между данными двумя точками:

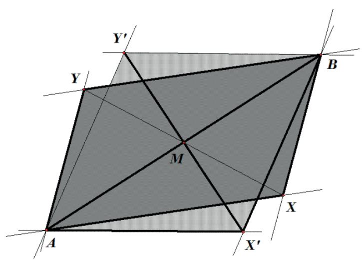

Рис. 4

Теперь мы можем привести примеры определений и теорем (то есть основных текстов нашего языка), формулировки которых согласуются с известными определениями и теоремами школьной геометрии.

Определение. *Средней линией треугольника* называется прямая, проходящая через середины любых двух его сторон.

Теорема. *Каждая средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон.*

Определение. *Медианой треугольника* называется прямая, проходящая через вершину треугольника и середину между двумя другими вершинами.

Теорема. *Если среди трех медиан треугольника нет ни одной пары параллельных, то все три медианы пересекаются в одной точке.*

Условие непараллельности здесь добавлено к стандартной школьной формулировке, поскольку существуют, опять-таки экзотические, интерпретации, в которых медианы треуголь-

---

[12] О понятии «интерпретация формул языка геометрии» и о возможных интерпретациях конкретных формул см. [8], [9].

ника определены (то есть середины между любыми двумя его вершинами существуют), но при этом параллельны. Примеры таких интерпретаций будут приведены в работе [8]. Сформулированное утверждение названо теоремой условно. Дело в том, что существуют плоскости, то есть множества, элементы которого называются точками, с выделенным классом подмножеств, называемых прямыми, на которых эта теорема неверна. На таких – *недезарговых*[13] – плоскостях многие привычные читателю утверждения неверны.

Заключение

На этом описание синтаксиса формального языка геометрии можно считать законченным. Это описание мы сознательно построили как порождающее, то есть во многом подобно тому, как это делают Н. Хомский, Е.В. Падучева [13] и некоторые другие исследователи естественного языка.

Между тем в ряде отношений наш подход к синтаксису, как мы отмечали, стоит ближе к подходу, принятому в семантических работах А. Вежбицкой [11] и ее коллег и учеников. Наши подходы объединяет идея порождения языка на основе ограниченного, в идеале минимального, множества базовых единиц – в нашем случае синтаксических, а в работах Вежбицкой – семантических («атомов смысла»). И у нее, и у нас основные единицы принадлежат нескольким сортам, и каждый из этих сортов несет определенную функциональную нагрузку. При этом единицы, относящиеся к разным сортам, имеют разные сферы употребления.

Параллелизм наших систем можно усмотреть еще и в том, что они прагматически ориентированы, то есть существенным образом учитывают фактор адресата и опираются на разного рода оценочные суждения (о простоте/сложности, об истинности/ложности, о разных степенях понятности и др.).

Основным при обучении языкам науки являются концепты «понятность» и «проверка понятности». Среди процедур проверки понятности можно выделить систему специальных вопросов, квалифицирующих разные языковые и когнитивные операции над научными текстами, включая оценку выполнения перевода с одного языка науки на другой. Нами были выделены пять языков

[13] Об этих плоскостях и их весьма экзотических свойствах см. [9].

геометрии, и два из них описаны с разной степенью подробности (что связано во многом с характером самих этих языков). Один из этих языков – вербальный, или естественно-подобный, язык, а второй – невербальный, или язык чертежей. В настоящей работе мы сделали шаг к описанию третьего языка, который назвали формальным языком геометрии. Его особенностью является то, что адресатом этого языка является в первую очередь не человек, а некий абстрактный автомат. В том случае, когда формулы обрабатывает автомат, их читаемость не является обязательным свойством.

В чем мы видим преимущества и недостатки обсуждаемого языка геометрии по сравнению с естественно-подобным языком и языком чертежей? Ответить на этот вопрос непросто, поскольку, как мы говорили, у формального языка и двух других языков разные адресаты. Несмотря на это, у формального языка имеются следующие несомненные достоинства:

- простота и экономность исходных выразительных средств;
- возможность построения содержательных фрагментов геометрической теории (помимо приведенных выше) с использованием минимальных расширений базового языка;
- прозрачность синтаксической структуры предложений (формул);
- возможность автоматического выделения составляющих формул – носителей определенных смыслов (например, смыслов ‘существование’ и ‘единственность’);
- допустимость автоматической проверки синтаксической правильности предложений и выявление ошибок;
- открытость языка – он допускает содержательные расширения, в том числе ориетированные на автоматизацию проверки правильности доказательств, а также извлечение содержательных следствий из теорем.

Из недостатков формального языка геометрии отметим очевидные. Это трудность прочтения, восприятия и понимания его предложений человеком, а также отсутствие явно выраженных связей между данным языком и остальными четырьмя языками геометрии.

В настоящей работе основное внимание было уделено синтаксису отдельных формул. За ее пределами остались важнейшие общематематические понятия, имеющие традиционное геометрическое содержание. Это понятия теоремы и ее доказательства, интерпретации и семантики формул, теории и ее модели. Некоторым из них мы надеемся посвятить последующие работы.

Литература

1. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Формальный язык геометрии как знаковая система. I. Элементарный синтаксис // Вестник РГГУ. Серия «История. Филология. Культурология. Востоковедение». 2017. № 11 (32). С. 69–87. (Московский лингвистический журнал. Том 19).
2. *Крипке С.* Тождество и необходимость // Новое в зарубежной лингвистике. Вып. 13: Логика и лингвистика (проблемы референции). М., 1982.
3. *Шабат Г.Б.* О множественности миров в науке и искусстве XX века // Гуманитарные чтения РГГУ 2014. М., 2015. С. 575–590.
4. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Естественный язык и язык геометрических чертежей: точки соприкосновения // Znaki czy nie znaki?/ Red naukowa J. Piatkowska, G. Zeldowicz. Warszawa, 2016. S. 197–221.
5. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. М., 2011. 296 с.
6. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Естественный язык и языки науки: конкуренция или взаимодействие? // Конкуренция в языке и коммуникации. Сб. науч. работ / отв. ред. Л.Л. Федорова. М., 2017. С. 40–56.
7. *Корельская Т.Д., Падучева Е.В.* Обратная теорема (алгоритмические и эвристические процессы мышления). М., 1978. 64 с.
8. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Семантика формального языка геометрии (*в печати*).
9. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Естественные языки и языки науки: проблемы порождения и понимания текстов (*в печати*).
10. *Крейдлин Г.Е., Шабат Г.Б.* Пространство в естественных языках и языках геометрии // Вестник РГГУ. Серия «История. Филология. Культурология. Востоковедение». 2015. № 1. С. 116–130. (Московский лингвистический журнал. Том 17 (1)).
11. *Вежбицкая А.* Язык. Культура. Познание. М., 1996. 416 с.
12. *Шабат Г.Б.* О симметрии в формулировках теорем // Лингвистика для всех: летние лингвистические школы 2005 и 2006. М., 2008. С. 203–218.
13. *Падучева Е.В.* О семантике синтаксиса. Материалы к трансформационной грамматике русского языка. М., 1974. 292 с.

References

1. Kreydlin G., Shabat G. The formal language of geometry as a semiotic system. I. Elementary syntax. *RGGU Bulletin. "History. Philology. Cultural Studies. Oriental Studies". Series.* 2017;11:69-87. (In Russ.)
2. Kripke S. Identity and necessity. V: New in foreign linguistics. Vol. 13: Logic and linguistics (reference issues). Moscow, 1982. (In Russ.)
3. Shabat G. On the plurality of worlds in the science and art of 20th century. V: RSUH Conference on the Humanities. 2014. Moscow, 2015. p. 575-90. (In Russ.)
4. Kreydlin G., Shabat G. The natural language and the language of geometric sketches. Points of contact // Znaki czy nie znaki?/ Red naukowa J. Piatkowska, G. Zeldowicz. Warszawa, 2016. s. 197-21. (In Russ.)

5. Bocharov VA., Markin VI. Introduction to logic. Moscow, 2011. 296 p. (In Russ.)
6. Kreydlin G., Shabat G. The natural language and languages of science: concurrence or interaction? V: Fedorova LL., ed. Competition in language and communication. Sat scientific works. Moscow, 2017. p. 40-56. (In Russ.)
7. Korel'skaya TD., Paducheva EV. Inverse theorem (algorithmic and heuristic processes of thought). Moscow, 1978. 64 p. (In Russ.)
8. Kreydlin G., Shabat G. Semantics of formal language of geometry. *In print*. (In Russ.)
9. Kreydlin G., Shabat G. The natural languages and languages of science: the problems of generation and comprehension of texts. *In print*. (In Russ.)
10. Kreydlin G., Shabat G. The space in natural languages and in the languages of geometry. *RGGU Bulletin. "History. Philology. Cultural Studies. Oriental Studies". Series*. 2015;1:116-30. (In Russ.)
11. Vezhbitskaya A. Language. Culture. Cognition. Moscow, 1996. 416 p. (In Russ.)
12. Shabat G. On the symmetry in the formulation of theorems. V: Linguistics for everybody. Summer linguistic schools 2005 and 2006. Moscow, 2008. p. 203-18. (In Russ.)
13. Paducheva EV. On the semantic of syntax. Materials for the transformational grammar of the Russian language. Moscow, 1974. 292 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Григорий Е. Крейдлин, доктор филологических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; gekr@iitp.ru

Георгий Б. Шабат, доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; george.shabat@gmail.com

Information about the authors

Grigorii E. Kreydlin, Dr. in Philology, professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993; gekr@iitp.ru

Georgii B. Shabat, Dr. in Physics and Mathematics, professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993; george.shabat@gmail.com

Дискуссии. Отклики

В предыдущем томе № 19 «Московского лингвистического журнала» («Вестник РГГУ» № 11 32), 2017) был опубликован очерк проф. РГГУ М.Р. Кауль, посвященный жизни и творчеству ее учителя, выдающегося советского языковеда Розалии Семеновны Гинзбург. После публикации в редакцию поступили два новых материала, принадлежащих перу учеников Р.С. Гинзбург. Написанные по личным воспоминаниям, эти материалы позволяют существенно расширить наши представления о методах преподавания и научного руководства, на которых строилась научно-педагогическая школа Р.С. Гинзбург.